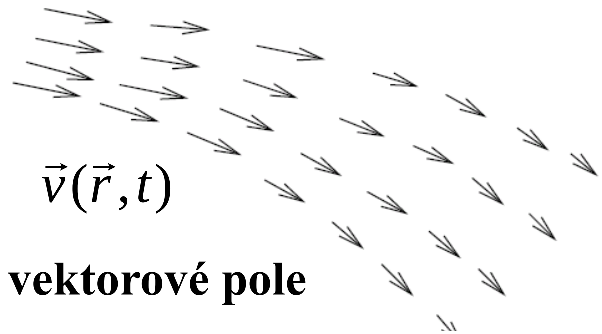
Mechanika tekutin – Proudění, Hydrodynamika

• Pohyb tekutiny vyšetřujeme vzhledem k soustavě souřadnic, která je např. pevně spojená s potrubím. Vzhledem k této soustavě má každá částice tekutiny rychlost:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$$



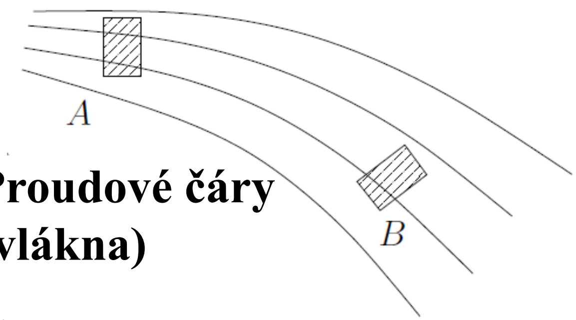
vektorové pole

• Takto znázorněné vektory jsou tečnami ke křivkám, které nazýváme **proudnice**, nebo **proudové čáry**. Není-li proudění ustálené (stacionární), mění se obraz proudnic v každém okamžiku.

• Při **ustáleném proudění** se rychlost tekutiny v žádném místě nemění a

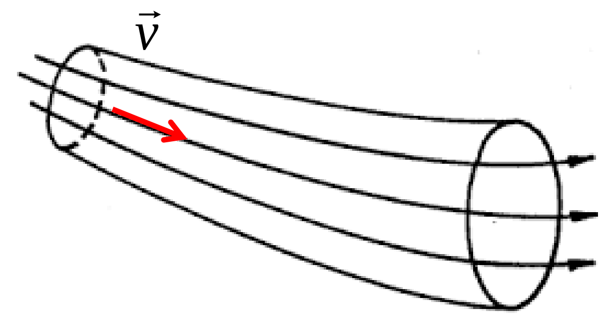
$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$$

je statické vektorové pole.



Proudové čáry (vlákna)

• Při ustáleném proudění je tvar proudnic stejný a **proudnice** se shodují s **trajektoriemi** částic tekutiny hovoříme potom o **proudové trubici**.



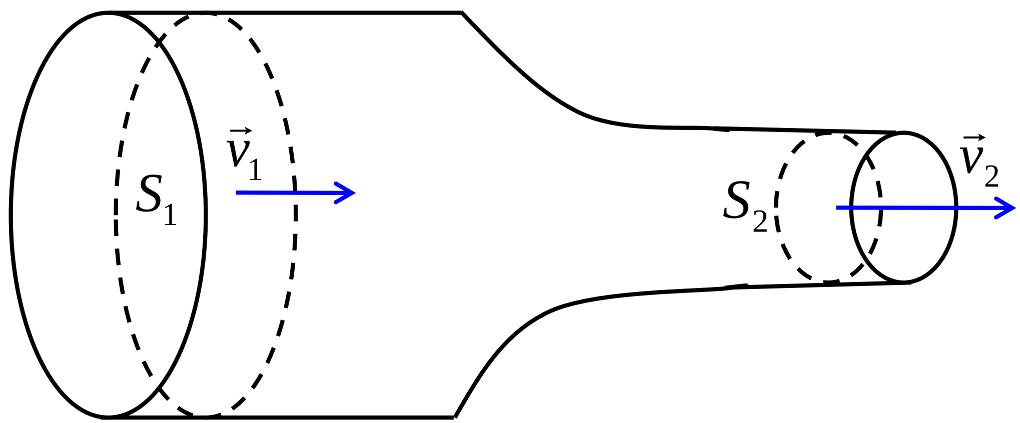
• Říkáme, že **proudění je vířivé**, jestliže :

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} \equiv \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \neq 0$$

• Říkáme, že **proudění je nevířivé (potenciálové)**, jestliže :

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \mathrm{grad}\; f, \quad v_i = \frac{\partial f}{\partial i} \quad kde \quad i = x, y, z$$

Mechanika tekutin – Proudění, Hydrodynamika – Rovnice kontinuity



• Hmotnost tekutiny, která proteče za čas Δt plochou S_1 a S_2 při stacionárním proudění je:

$$\Delta m_1 = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t, \quad \Delta m_2 = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t$$

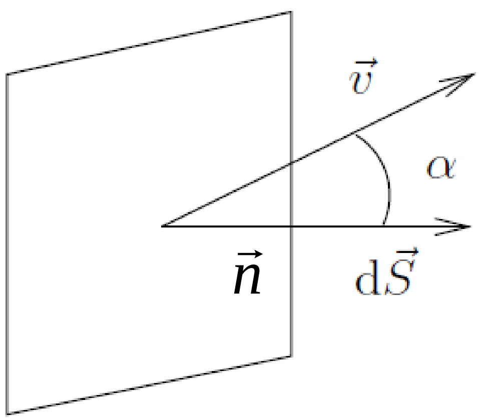
• Jelikož platí zákon zachování hmotnosti dostaneme:

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \quad \Rightarrow \rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$$

Rovnici kontinuity pro stacionární proudění tekutiny trubicí.

• V případě **kapaliny** je **hustota konstantní** a rovnice kontinuity se zjednoduší:

$$\rho_1 = \rho_2 \quad \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2$$



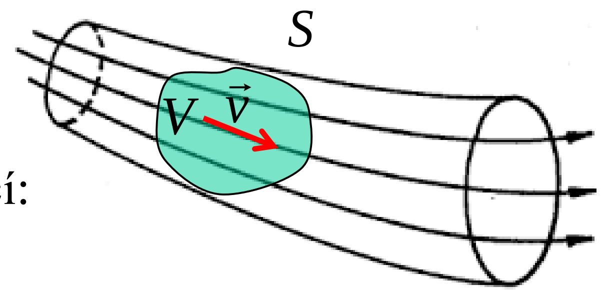
Hmotnostní (prů)tok definujeme: $Q_m \equiv \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \rho S v$

Objemový (prů)tok definujeme: $Q_v \equiv \dfrac{Q_m}{\rho} = S v$

Zavedeme orientovanou plochu dostaneme pro element hmotného toku:

$$\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S \quad \Rightarrow dQ_m = \rho \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{S} = \rho v\,\mathrm{d}S \cos\alpha$$

Mechanika tekutin – Proudění, Hydrodynamika – Rovnice kontinuity



• Zavedeme orientovanou plochu dostaneme pro element hmotnostního toku:

$$\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\mathrm{d}S \quad \Rightarrow dQ_m = \rho\vec{v}\mathrm{d}\vec{S} = \rho v \mathrm{d}S\cos\alpha$$

• Celkový hmotnostní tok libovolnou plochou dostaneme integrací:

$$Q_m = \oint_S \rho\vec{v}\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S \rho v\cos\alpha\,\mathrm{d}S$$

• Hmotnostní tok uzavřenou plochou směrem ven se pak musí rovnat úbytku tekutiny v objemu V za jednotku času :

$$m = \int_V \rho\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \oint_S \rho\vec{v}\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\mathrm{d}V$$

• Dostáváme **rovnici kontinuity** v integrálním tvaru:

$$\oint_S \rho\vec{v}\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V$$

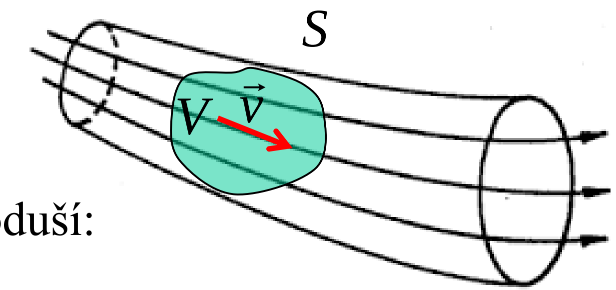
• Pro konečnou část prostoru V omezenou plochou S lze upravit pomocí Gaussovy věty vektorové analýzy:

$$\oint_S \rho\vec{v}\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \mathrm{div}(\rho\vec{v})\mathrm{d}V, \quad kde \quad \mathrm{div}(\rho\vec{v}) \equiv \frac{\partial\rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial\rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial\rho v_z}{\partial z}$$

• Dostáváme **rovnici kontinuity** v diferenciálním tvaru:

$$\int_V \mathrm{div}(\rho\vec{v})\mathrm{d}V = \int_V \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$$

Mechanika tekutin – Proudění, Hydrodynamika – Rovnice kontinuity



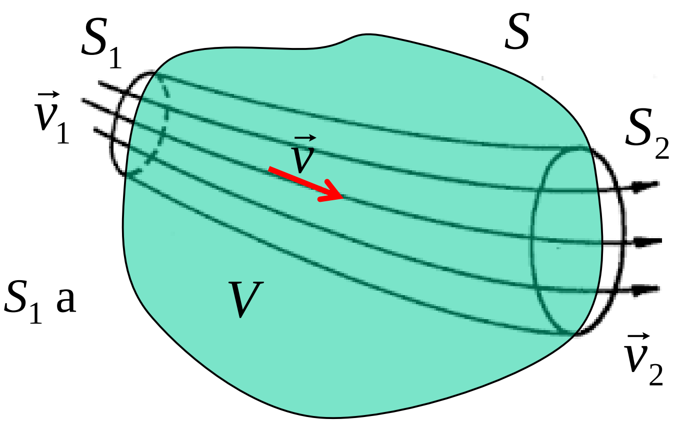
- **Rovnici kontinuity** v diferenciálním tvaru:

$$\mathrm{div}(\rho\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$$

- Pro **ustálené** proudění **nestlačitené kapaliny** se rovnice zjednoduší:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{\partial\rho}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}(\vec{v}) = 0$$



- do prostoru ohraničeného S vstupují částice tekutiny plochou S_1 a vystupují plochou S_2. Bude tedy:

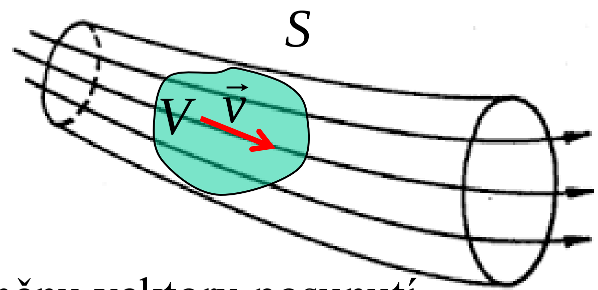
$$\oint_S \rho\vec{v}\mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_1} \rho\vec{v}_1\mathrm{d}\vec{S}_1 + \int_{S_2} \rho\vec{v}_2\mathrm{d}\vec{S}_2 = -Q_{m1} + Q_{m2} = 0 \Rightarrow Q_m = konst$$

- Za ustáleného proudění je hmotnostní tok **tekutiny** libovolným průřezem proudové trubice konstantní. Jsou-li rychlost v a hustota ρ v celém průřezu konstantní, lze rovnici kontinuity psát v jednoduchém tvaru: $Q_m = \rho S v = konst.$

- Pro **nestlačitelnou kapalinu**: $Q_V = S v = konst.$

Mechanika tekutin – Proudění, Hydrodynamika – Pohybová rovnice

• I pro tekutiny platí pohybová rovnice kontinua :



$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} + G_i = \rho \frac{\mathrm{d}^2 u_i}{\mathrm{d}t^2}, \quad i = x, y, z$$

• Místo napětí dosadíme působící tlak na tekutinu a za časovou zněnu vektoru posunutí dosadíme rychlost proudící tekutiny a dostaneme **pohybovou rovnici proudící ideální tekutiny** :

$$\mathrm{grad}(p) + \vec{G} = \rho \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}, \quad -\frac{\partial p}{\partial i} + G_i = \rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}, \quad i = x, y, z$$

$$\mathrm{grad}(p) \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i}, \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}, \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} \right)$$

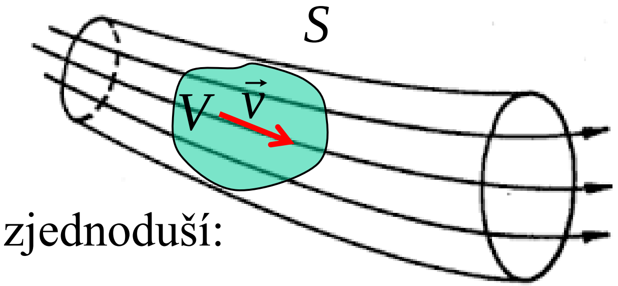
• Zavedeme-li intenzitu silového pole dostaneme **Eulerovu hydrodynamickou rovnici**:

$$\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial v_i}{\partial j}\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v_i}{\partial t} = \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial v_i}{\partial j} v_j + \frac{\partial v_i}{\partial t}, \qquad i = x, y, z$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial v_i}{\partial j} v_j = I_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial i}$$

Mechanika tekutin – Proudění, Hydrodynamika – Bernoulliova rovnice

- **Eulerova hydrodynamická rovnice**:



$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial v_i}{\partial j} v_j = I_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial i}, \quad i = x, y, z$$

- Při stacionárním proudění není rychlost funkcí času, rovnice se zjednoduší:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial v_i}{\partial j} v_j = I_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial i}, \quad i = x, y, z$$

- Rovnici vynásobíme jednotkovým vektorem ve směru rychlosti, který má směr proudnice a integrujeme ve podél proudnice:

$$\int \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial v_i}{\partial j} v_j \frac{v_i}{v} \mathrm{d}s = \int I_i \frac{v_i}{v} \mathrm{d}s - \int \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial i}\frac{v_i}{v} \mathrm{d}s + konst., \quad i = x, y, z$$

- Je-li pole objemových sil konzervativní:

$$I_i = \frac{\partial \varphi}{\partial i}, \quad \frac{v_i}{v}\mathrm{d}s = \mathrm{d}i \quad \Rightarrow \quad \int I_i \frac{v_i}{v}\mathrm{d}s = -\int \frac{\partial \varphi}{\partial i}\mathrm{d}i = -\int \mathrm{d}\varphi = \quad i = x, y, z$$

- Podobně:

$$\int \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial i}\frac{v_i}{v}\mathrm{d}s = \int \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial i}\mathrm{d}i = \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho}, \quad i = x, y, z$$

Mechanika tekutin – Proudění, Hydrodynamika – Bernoulliova rovnice

- Využijeme-li identitu, dostaneme:

$$\frac{\partial v^2}{\partial j} = \frac{\partial (v_i v_i)}{\partial j} = 2 v_i \frac{\partial v_i}{\partial j} \Rightarrow \int \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial v_i}{\partial j} v_j \frac{v_i}{v} \mathrm{d}s = \int \frac{\partial v^2/2}{\partial j} \mathrm{d}j = \int d\left(\frac{v^2}{2}\right), \quad i = x, y, z$$

- Cekem tedy dostaneme vyjádření pro **Bernoulliovu rovnici** pro **obecnou stlačitelnou tekutinu**:

$$\int d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \int d\varphi + \int \frac{dp}{\rho} = konst. \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} + \varphi + \int \frac{dp}{\rho} = konst.$$

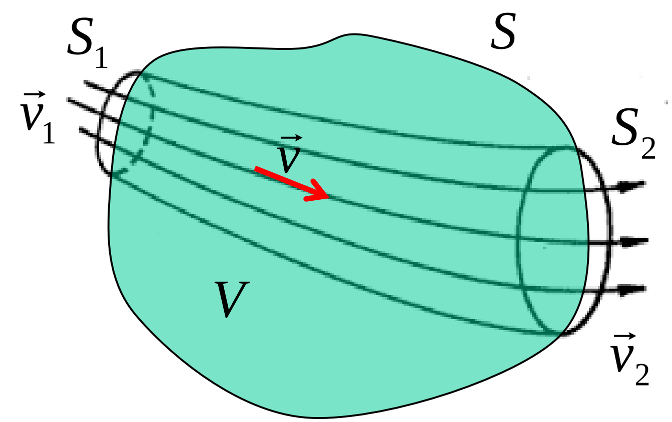
- **Bernoulliovu rovnici** pro **kapalinu**, kdy je hustota konstantní:

$$\rho = konst. \quad \Rightarrow \quad \rho \frac{v^2}{2} + \rho\varphi + p = konst.$$

- „Součet kinetické energie objemové jednotky kapaliny, její potenciální energie a tlaku je podél proudnice konstantní.“

- Pro libovolná dvě místa na stejné proudnici má tento výraz stejnou hodnotu:

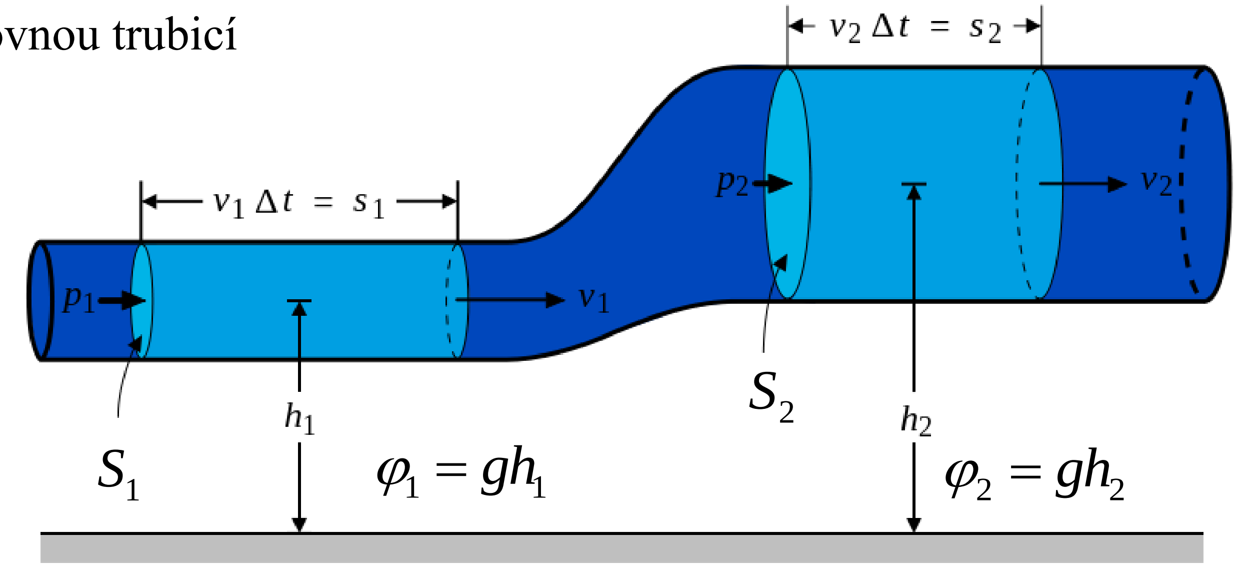
$$\frac{v_1^2}{2} + \varphi_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \varphi_2 + \frac{p_2}{\rho}$$



Mechanika tekutin – Proudění, Hydrodynamika – Bernoulliova rovnice

- Příklad proudění kapaliny vodorovnou trubicí
- ideální (nestlačitelná) kapalina

$$\rho = konst.$$



- kdyby kapalina stála

$$v_1 = v_2 = 0$$

$$\rho\varphi_1 + p_1 = \rho\varphi_2 + p_2 \Rightarrow$$

$$p_2 - p_1 = \rho\varphi_2 - \rho\varphi_1 = \rho g\left(h_2 - h_1\right)$$

- **Bernoulliova rovnice:** $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 + \rho g h_2 = konst.$

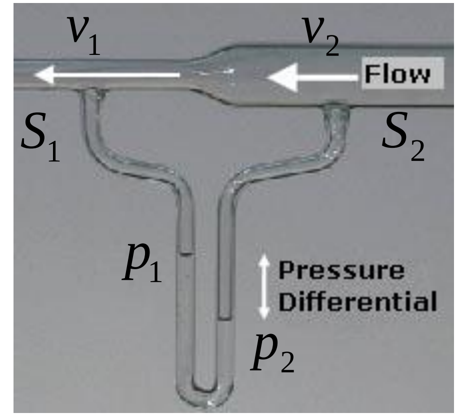
- Rovnice kontinuity: $Q_1 = Q_2 \Rightarrow \frac{V_1}{\Delta t} = \frac{V_2}{\Delta t} \Rightarrow \frac{S_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = \frac{S_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2 = konst.$

Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška ($h = konst.$)
- **Venturiho efekt**

(nebo také hydrodynamický či aerodynamický paradox)

$$\underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{dynamický tlak}} + \underbrace{p}_{\text{statický tlak}} = konst.$$



$p_1 < p_2$

(rovnice kontinuity)

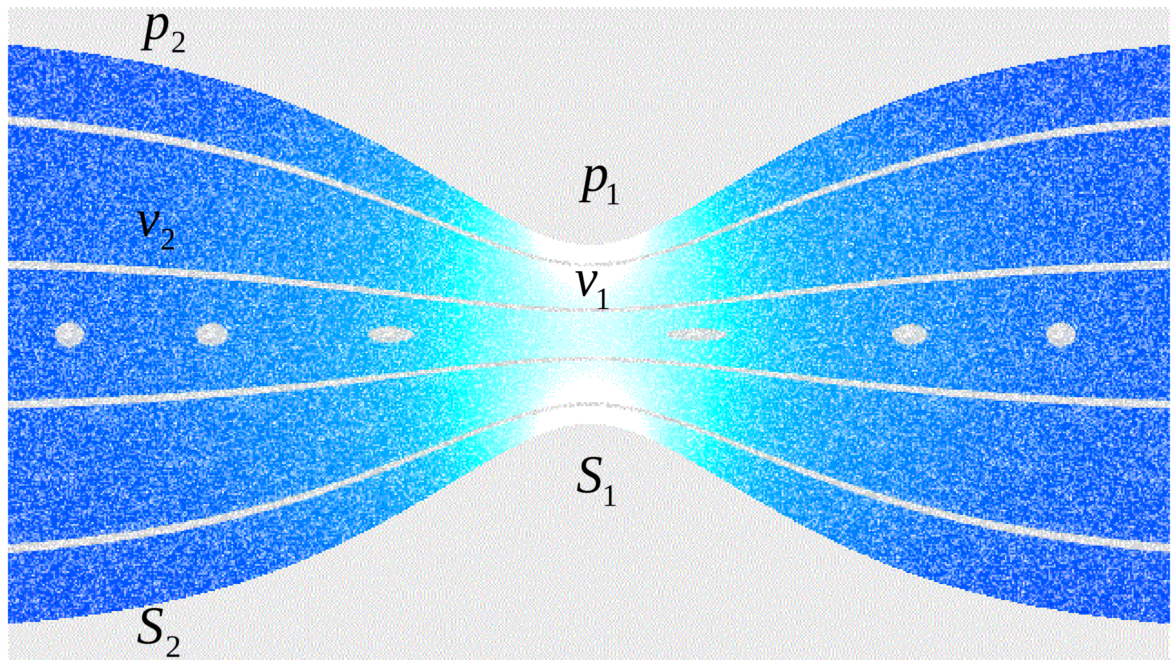
$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2$$

$$S_2 > S_1 \Rightarrow v_1 > v_2$$

(Bernoulliova rovnice)

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

$$v_1 > v_2 \Rightarrow p_1 < p_2$$

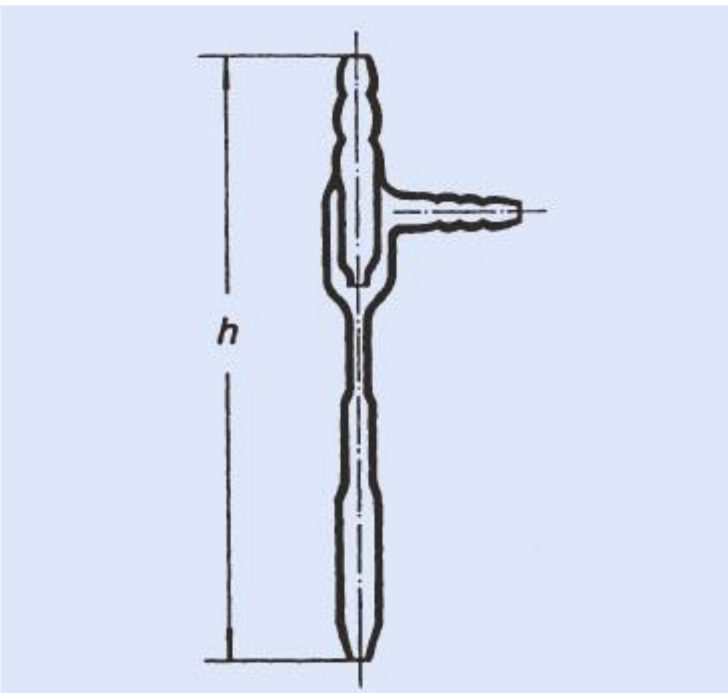


Bernoulliova rovnice

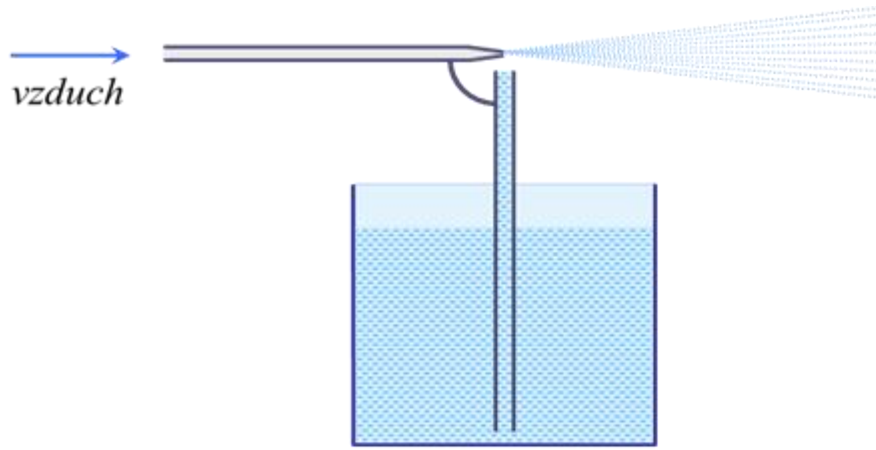
- pokud se nemění výška (*h* = *konst.*)

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = konst.$$

- Vodní vývěva



- stříkací pistole



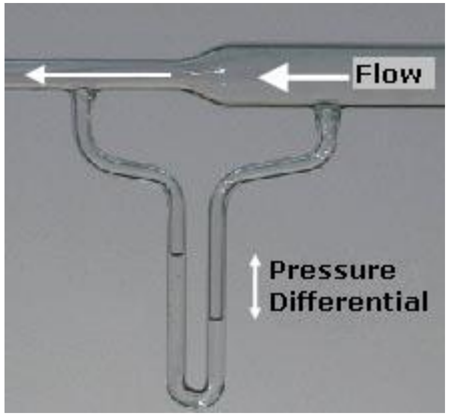
Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška ($h = konst.$)

- **Venturiho efekt**

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = konst.$$

dynamický tlak statický tlak

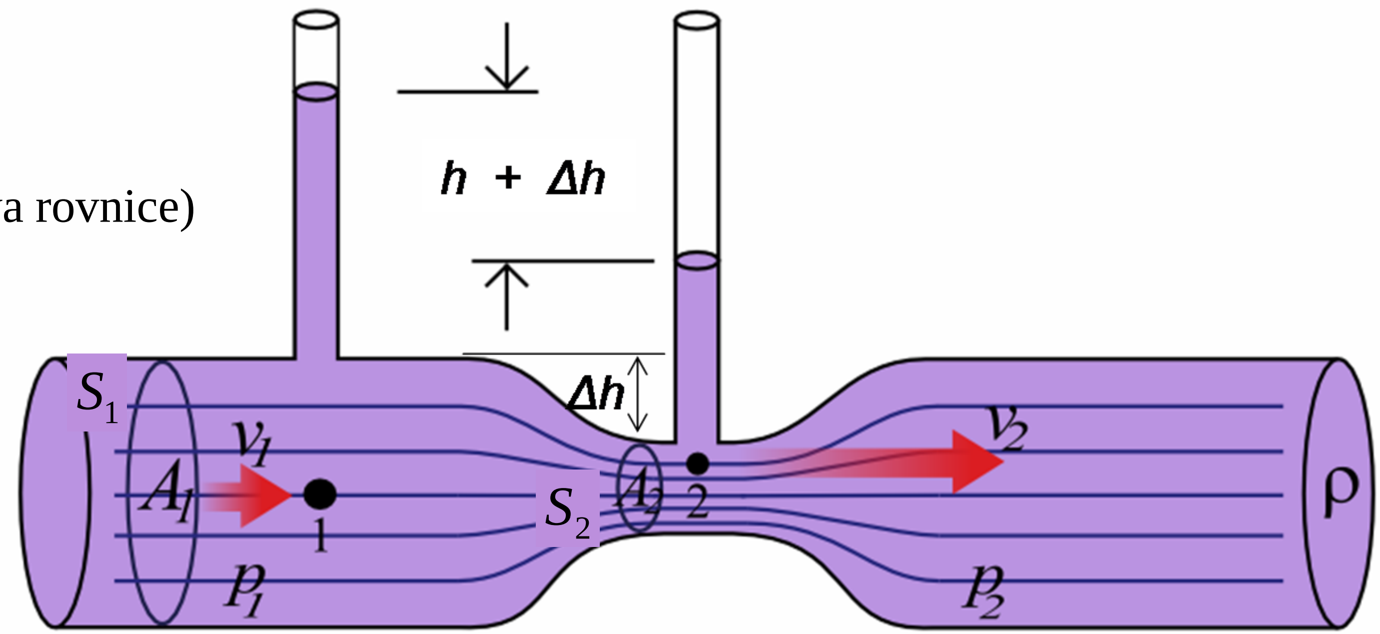


$S_1 v_1 = S_2 v_2$ (rovnice kontinuity)

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

(Bernoulliova rovnice)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}}$$



Bernoulliova rovnice

• pokud se nemění výška (h = *konst.*)

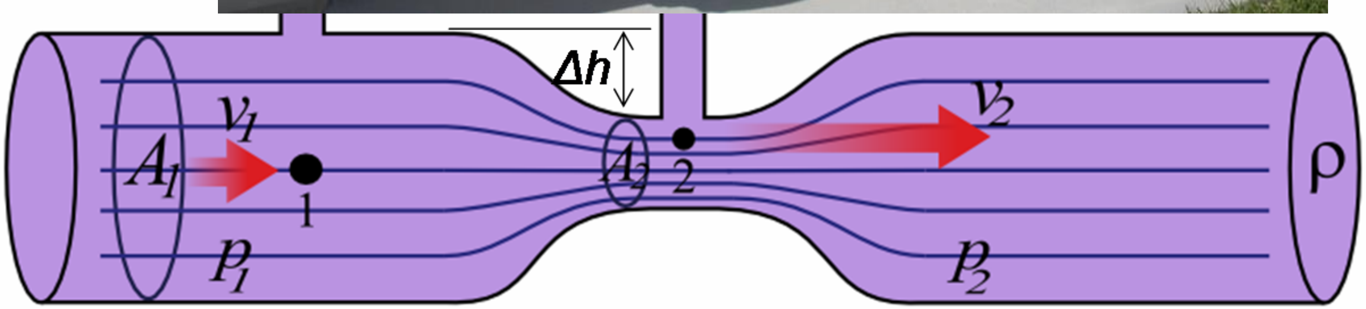
• **Venturiho efekt**

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$ (rovnice kontinuity)

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

(Bernoulliova rovnice)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}}$$



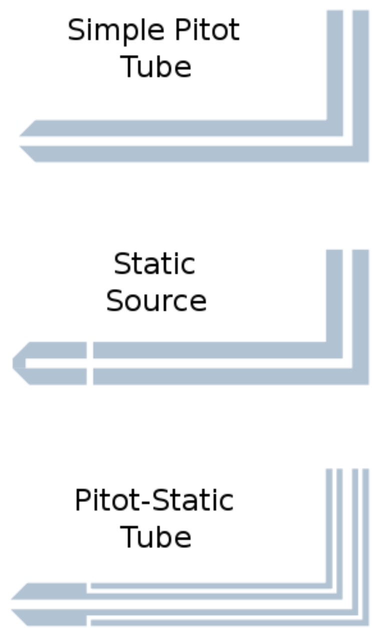
Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška (h = *konst.*)
- **Pitotova trubice**

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = konst.$$

dynamický tlak statický tlak

Pitotova trubice z letounu F/A-18 Hornet



$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = p_{\mathrm{tot}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\left(p_{\mathrm{tot}} - p\right)}{\rho}}$$

Bernoulliova rovnice

- pokud se nemění výška (h = *konst.*)
- **Aerodynamický vztlak**

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = konst.$$

(rovnice kontinuity)

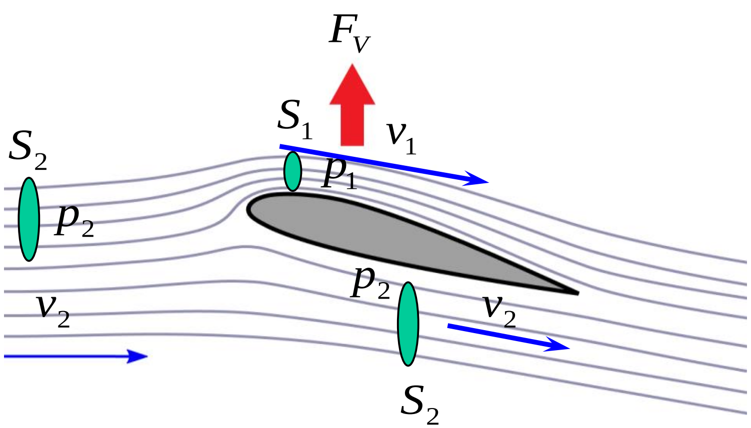
$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2$$

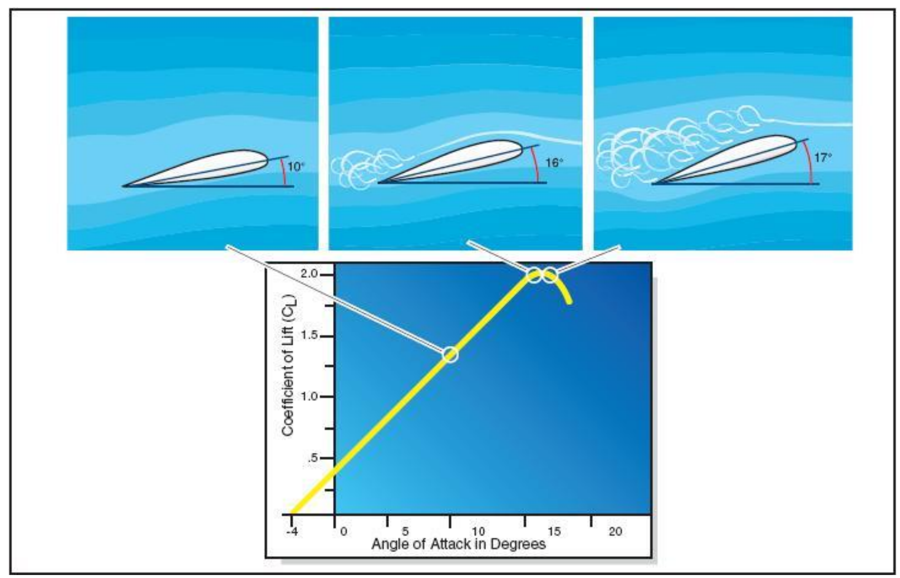
$$S_2 > S_1 \Rightarrow v_1 > v_2$$

(Bernoulliova rovnice)

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

$$v_1 > v_2 \Rightarrow p_1 < p_2 \Rightarrow F_V$$

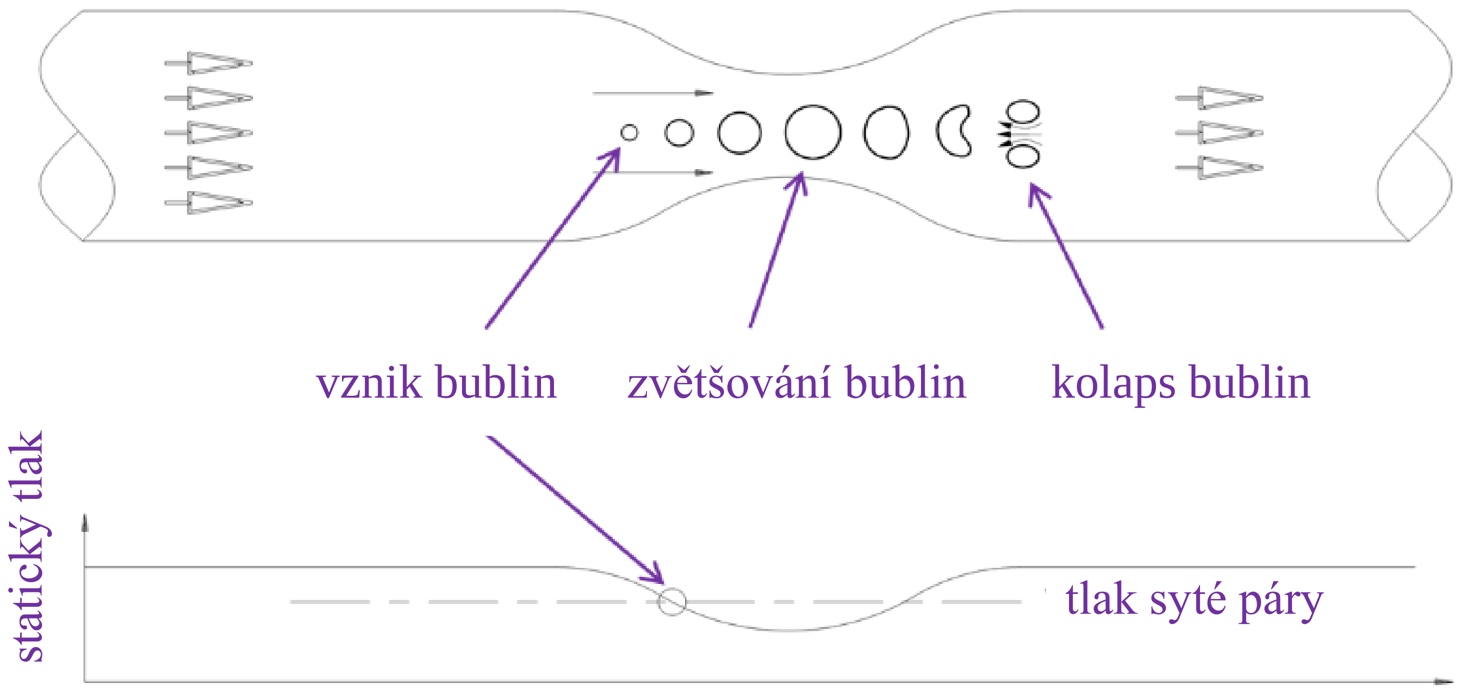




Bernoulliova rovnice

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = konst.$$

- pokud se nemění výška (*h* = *konst.)*
- Hydrodynamická **kavitace** – vznik dutin v kapalině při lokálním poklesu tlaku



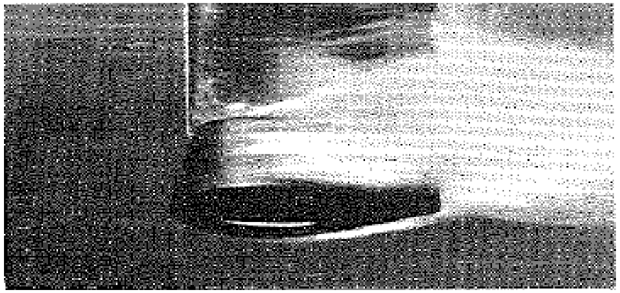
- Kavitace je zpočátku vyplněna vakuem, později se vyplní párou okolní kapaliny nebo do ní mohou difundovat plyny z okolní kapaliny.

Bernoulliova rovnice

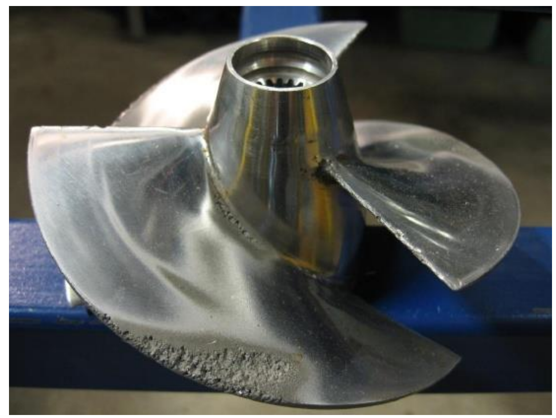
$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = konst.$$

• pokud se nemění výška (*h*= *konst.*)

• Hydrodynamická kavitace – vznik dutin v kapalině při lokálním poklesu tlaku



• Při vymizení podtlaku, který kavitaci vytvořil, její bublina kolabuje za vzniku rázové vlny s destruktivním účinkem na okolní materiál.



• Kavitace je zpočátku vyplněna vakuem, později se vyplní párou okolní kapaliny nebo do ní mohou difundovat plyny z okolní kapaliny.